COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a IX-a

1. Să se rezolve ecuația $[x+k]\{x+k\}=xk$, unde $k\in\mathbb{Z}$.

2. Să se arate că pentru orice numere reale pozitive *a*, *b* și *c*, are loc inegalitatea

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

3. Fie *ABCD* patrulater convex.

a) Construiți punctele *N* pe (*AD*) și *Q* pe (*BC*) astfel încât $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{BQ}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

b) Determinați locul geometric al punctelor *M* din planul patrulaterului *ABCD* pentru care modulul vectorului $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}$ are valoare constantă.

4. Se consideră punctele *D* și *M* în planul triunghiului *ABC* astfel încât $34\overrightarrow{MA}+36\overrightarrow{MB}+$ $+5\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ și $\overrightarrow{AD}=\frac{18}{35}\overrightarrow{AB}$. Fie *Q* punctul de intersecție dintre dreptele *AM* și *BC*.

a) Demonstrați că punctele *C*, *M* și *D* sunt coliniare. **b**) Aflați $\frac{MA}{MQ}$.

Subiect elaborat de Ioana Galan

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a X-a

1. Fie $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Arătați că, dacă $|z_1|=|z_2|$ și $z_1+z_2>0$, atunci $z_1\cdot z_2>0$.

2. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât inegalitatea $\log_{\frac{a-1}{a+2}}\left(x^2-2x+3\right)\ge 1$ să aibă loc pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\sqrt[3]{x-3}\right]+\left[\sqrt[3]{x-2}\right]=1$.

4. Într-un turneu de șah, fiecare dintre jucători dispută câte o partidă cu fiecare dintre ceilalți. Știind că nicio partidă nu se termină remiză și că toți participanții obțin cel puțin câte o victorie, demonstrați că există un grup de trei șahiști *A*, *B*, *C* astfel încât *A* îl învinge pe *B*, *B* îl învinge pe *C* și *C* îl învinge pe *A*.

Subiect elaborat de Gabriel Popa

COLEGIUL NAȚIONAL IAŞI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a XI-a

1. Fie $b=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$ o permutare din S_5.

a) Determinați cel mai mic număr $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $b^n=e$.

b) Fie $k\in\mathbb{Z}$ cu $b^k=e$; arătați că 6 divide k.

2. Dacă $A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, notăm cu $\mathrm{Tr}(A)$ suma elementelor de pe diagonala sa principală.

a) Demonstrați că, dacă Tr (A) = 0, atunci $A^2B=BA^2, \forall B\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Arătați că, dacă Tr (A)$\neq$ 0, $B\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ şi $A^2B=BA^2$, atunci $AB = BA$.

3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale.

a) Dacă şirul $(\{x_n\})_{n\geq 1}$ este convergent, rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent ?

b) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea că $x_{n+1}-x_n\to 0$, rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent ?

c) Dacă $x_n\in\{1,2,\dots,9\}, \forall n\geq 1$, iar $y_n=\lg\overline{x_1x_2\dots x_n}$, calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{n}$.

4. Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{a_1}+x^{a_2}+\dots+x^{a_n}-n}{a_1^x+a_2^x+\dots+a_n^x-a_1-a_2-\dots-a_n}$, unde $a_i>0, \forall i=\overline{1,n}, n\in\mathbb{N}^*$.

Subiect elaborat de Valentina Blendea

COLEGIUL NAȚIONAL IAŞI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 2009

CLASA a XII-a

1. a) Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, are primitive.

b) Dați exemplu de o funcție neintegrabilă care să admită primitive şi un exemplu de funcție integrabilă care să nu admită primitive.

2. a) Calculați $\int\ln\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)dx,\ x\in(0,1]$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că pentru orice funcție conti nuă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcția $f+g$ are proprietatea lui Darboux. Rezultă că f este în mod necesar continuă?

3. a) Determinați toate subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}_{13}^*,\cdot)$.

b) Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 13 elemente şi $f:G\to G, f(x)=x^6$. Demonstrați că f este automorfism al lui G.

Subiect elaborat de Cristian Lazăr